

基于 Bancroft 算法的多点定位 TOA-LS 估计

林云松¹, 孙卓振¹, 彭良福²

(1. 电子科技大学自动化工程学院, 四川成都 611731; 2. 西南民族大学电气信息工程学院, 四川成都 610041)

摘要: 由于目标信号的发射时间未知, 无源定位技术大多利用 TDOA(到达时间差)进行目标定位. 本文将求解 GPS 单点定位的 Bancroft 算法应用于 TOA(到达时间)多点定位方程的求解, 提出了基于 Bancroft 算法的无源多点定位 TOA-LS(最小二乘)估计算法. TOA-LS 包含三个线性方程, 其加权系数与目标位置和目标信号发射时间相关. 采用 Bancroft 算法给出初始值并求解 TOA-LS 方程, 完成加权系数的迭代更新. 仿真结果表明对不同几何位置的目标, TOA-LS 估计可获得接近理论方差下界的近似最优的性能.

关键词: Bancroft 算法; 多点定位; TOA 估计; 最小二乘法

中图分类号: TN953 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2012)03-0621-04

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.3969/j.issn.0372-2112.2012.03.036

The TOA-LS Estimation for Multilateration Based on Bancroft's Algorithm

LIN Yun-song¹, SUN Zhuo-zhen¹, PENG Liang-fu²

(1. College of Automation, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu, Sichuan 611731, China;

2. College of Electrical Information Engineering, Southwest University for Nationalities, Chengdu, Sichuan 610041, China)

Abstract: The traditional location methods for passive localization are TDOA (Time Difference of Arrival) based due to the unknown TOE (Time Of Emission). Based on Bancroft's algorithm, which was developed for GPS single-point position, the TOA least squares (TOA-LS) estimation algorithm for passive multilateration is proposed. The TOA-LS equations are composed of three linear equations whose coefficients are dependent on the target position and TOE. Using Bancroft's algorithm with some initial values, the TOA-LS algorithm solves the linear equations for new solutions and updates their coefficients. Simulation experiments demonstrate that the TOA-LS algorithm is near optimal and attaining the theoretical lower bound for targets in different geometric positions.

Key words: Bancroft's algorithm; multilateration; time of arrival (TOA); least square method

1 引言

近年来,随着新航行系统概念的提出,多点定位 (Multilateration)和 ADS-B(广播式自动相关监视系统)作为新航行系统中典型的监视技术越来越受到航空电子界的关注,并被国际民航组织(ICAO)和欧洲民用航空设备组织(EUROCAE)采纳作为建议使用的监视技术^[1,2]. 多点定位系统采用分布的3个或更多的地面站接收飞机发射的二次监视雷达的应答信号,利用接收信号的TDOA对飞机定位. 由于目标信号的发射时间未知,无源多点定位技术大多利用TDOA进行目标定位,即双曲线多点定位方法. 多点定位系统通常采用泰勒级数法将非线性的定位方程组线性化,再对其进行迭代求

解^[3],该算法对初始值较敏感,并存在算法收敛问题. 目前提出了许多闭式的线性算法求解定位方程^[4~6],但這些算法大都只能在高信噪比条件下达到最优估计. 文献^[7]对TDOA定位提出了最大似然(ML)估计的近似解法,并给出了闭式的ML方程组.

针对求解GPS伪距单点定位方程问题, Bancroft于1985年提出了一种闭式的全局性非线性最小二乘算法^[8](Bancroft算法). 文献^[9]将Bancroft算法应用于多点定位方程的求解,可得到包含TOE的目标位置估计. 由于Bancroft算法直接对非线性定位方程组进行求解,其本身在解的统计特性上并不能达到最优.

与通常的TDOA定位方法不同,本文通过引入目标信号发射时间(TOE)作为未知量,从非一致性TOA定位

方程组入手,首先基于最小二乘准则,将 TOA 定位方程组转换为三个线性方程,其加权系数与目标位置和 TOE 相关;然后采用 Bancroft 算法得出了 TOA 定位方程组的闭式最小二乘解.由于 TOA-LS 线性方程的加权系数是未知的,只能通过迭代方法进行求解,因此最终得到的是 TOA 定位方程的近似最小二乘解.仿真结果表明经 5 次更新即可获得接近理论方差下界的估计结果.

2 多点定位的 Bancroft 算法

Bancroft 算法的详细推导过程可参见文献[10].假设在二维平面上的多点定位系统的地面接收站数量 $N \geq 3$,每个 TOA 测量值满足以下方程:

$$(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 = c^2(t_i - t)^2, i = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

其中, (x, y) 是目标位置坐标, t 是信号发射时间, c 是光速, (x_i, y_i) 是第 i 个地面站的位置坐标, t_i 为信号到达第 i 个地面站的时间.

将式(1)展开后得到:

$$2(x_i x + y_i y - c^2 t_i t) = x^2 + y^2 - c^2 t^2 + x_i^2 + y_i^2 - c^2 t_i^2 \quad (2)$$

定义如下时-空向量和权矩阵:

$$\mathbf{g}_i = [x_i, y_i, ct_i]^T \quad (3)$$

$$\mathbf{h} = [x, y, ct]^T \quad (4)$$

$$\mathbf{M}_{3 \times 3} = \text{diag}(1, 1, -1) \quad (5)$$

引入 Lorentz 内积:

$$\langle \mathbf{g}_i, \mathbf{h} \rangle = \mathbf{g}_i^T \mathbf{M} \mathbf{h} = x_i x + y_i y - c^2 t_i t \quad (6)$$

则式(2)可写为:

$$\langle \mathbf{g}_i, \mathbf{g}_i \rangle - 2 \langle \mathbf{g}_i, \mathbf{h} \rangle + \langle \mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle = 0, i = 1, 2, \dots, N \quad (7)$$

将式(7)写为矩阵形式:

$$\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{B} \mathbf{M} \mathbf{h} + \lambda \boldsymbol{\tau} = 0 \quad (8)$$

其中:

$$2\boldsymbol{\alpha} = [\langle \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1 \rangle \ \dots \ \langle \mathbf{g}_N, \mathbf{g}_N \rangle]^T$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & ct_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N & y_N & ct_N \end{bmatrix}$$

$$2\lambda = \langle \mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle = x^2 + y^2 - c^2 t^2$$

$$\boldsymbol{\tau} = [1 \ \dots \ 1]_{N \times 1}^T$$

在式(8)中,若把 λ 作为已知数,则可得到非线性最优估计:

$$\hat{\mathbf{h}} = [\hat{x} \ \hat{y} \ \hat{ct}]^T = \mathbf{M} \mathbf{F} (\lambda \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\alpha}) \quad (9)$$

其中 $\mathbf{F} = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T$, 参数 λ 可由以下二次方程解出:

$$\langle \mathbf{F} \boldsymbol{\tau}, \mathbf{F} \boldsymbol{\tau} \rangle + \lambda^2 + 2(\langle \mathbf{F} \boldsymbol{\tau}, \mathbf{F} \boldsymbol{\alpha} \rangle - 1) \lambda + \langle \mathbf{F} \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{F} \boldsymbol{\alpha} \rangle = 0 \quad (10)$$

将上式的两个解 λ_1 和 λ_2 分别代入式(9)中可得到两个解向量,后面将讨论解向量的选取问题.

3 基于 Bancroft 算法的 TOA 定位方程的最小二乘解

3.1 TOA 定位方程的最小二乘解(TOA-LS)

TOA 存在测量误差,将导致 TOA 定位方程组是非一致性的.包含测量误差的 TOA 定位方程如下:

$$c(t_i - t) = r_i + \varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, N \quad (11)$$

其中, $r_i = [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]^{1/2}$, ε_i 表示将 TOA 时间测量转换为距离测量后的误差项.对式(11)的误差平方和

$$J = \sum_{i=1}^N (r_i - c(t_i - t))^2 \quad (12)$$

求最小值将给出时-空向量 \mathbf{h} 的最小二乘解.当测量误差 ε_i 是零均值高斯分布的独立随机变量且其协方差矩阵正比于单位矩阵时,TOA 定位方程组的最小二乘解与最大似然估计等效.求 J 相对于 \mathbf{h} 的导数,并令其结果等于零,可得到以下三个方程:

$$\sum_{i=1}^N \frac{(x - x_i) [r_i - c(t_i - t)]}{r_i} = 0$$

$$\sum_{i=1}^N \frac{(y - y_i) [r_i - c(t_i - t)]}{r_i} = 0 \quad (13)$$

$$\sum_{i=1}^N [r_i - c(t_i - t)] = 0$$

将等式

$$r_i - c(t_i - t) = \frac{r_i^2 - c^2(t_i - t)^2}{r_i + c(t_i - t)}$$

代入式(13),并采用 Lorentz 内积表示,展开后可得如下方程:

$$\sum_{i=1}^N a_i (\langle \mathbf{g}_i, \mathbf{g}_i \rangle - 2 \langle \mathbf{g}_i, \mathbf{h} \rangle + \langle \mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle) = 0$$

$$\sum_{i=1}^N b_i (\langle \mathbf{g}_i, \mathbf{g}_i \rangle - 2 \langle \mathbf{g}_i, \mathbf{h} \rangle + \langle \mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle) = 0$$

$$\sum_{i=1}^N c_i (\langle \mathbf{g}_i, \mathbf{g}_i \rangle - 2 \langle \mathbf{g}_i, \mathbf{h} \rangle + \langle \mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle) = 0 \quad (14)$$

其中, $a_i = \frac{x - x_i}{r_i(r_i + c(t_i - t))}$, $b_i = \frac{y - y_i}{r_i(r_i + c(t_i - t))}$, $c_i = \frac{1}{(r_i + c(t_i - t))}$.将式(14)写为矩阵形式:

$$\boldsymbol{\theta} - \mathbf{D} \mathbf{M} \mathbf{h} + \lambda \boldsymbol{\delta} = 0 \quad (15)$$

其中,

$$2\boldsymbol{\theta} =$$

$$\left[\sum_{i=1}^N a_i \langle \mathbf{g}_i, \mathbf{g}_i \rangle \ \sum_{i=1}^N b_i \langle \mathbf{g}_i, \mathbf{g}_i \rangle \ \sum_{i=1}^N c_i \langle \mathbf{g}_i, \mathbf{g}_i \rangle \right]^T$$

$$D = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N a_i x_i & \sum_{i=1}^N a_i y_i & \sum_{i=1}^N a_i c t_i \\ \sum_{i=1}^N b_i x_i & \sum_{i=1}^N b_i y_i & \sum_{i=1}^N b_i c t_i \\ \sum_{i=1}^N c_i x_i & \sum_{i=1}^N c_i y_i & \sum_{i=1}^N c_i c t_i \end{bmatrix}$$

$$2\lambda = \langle \mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle = x^2 + y^2 - c^2 t^2$$

$$\boldsymbol{\delta} = \left[\sum_{i=1}^N a_i \quad \sum_{i=1}^N b_i \quad \sum_{i=1}^N c_i \right]^T$$

式(15)和式(8)结构相似,但式(15)中的加权系数 a_i , b_i 和 c_i 中包含有未知量 (x, y, ct) , 因此需首先根据式(8)求得解向量 \mathbf{h} 的初始估计值, 然后计算加权系数 a_i , b_i 和 c_i , 再由下式求出式(15)新的解向量 \mathbf{h} .

$$\hat{\mathbf{h}} = [\hat{x} \quad \hat{y} \quad \hat{ct}]^T = \mathbf{M}D^{-1}(\lambda\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\theta}) \quad (16)$$

参数 λ 由以下二次方程解出:

$$\langle D^{-1}\boldsymbol{\delta}, D^{-1}\boldsymbol{\delta} \rangle \lambda^2 + 2(\langle D^{-1}\boldsymbol{\delta}, D^{-1}\boldsymbol{\theta} \rangle - 1) \cdot \lambda + \langle D^{-1}\boldsymbol{\theta}, D^{-1}\boldsymbol{\theta} \rangle = 0 \quad (17)$$

二次方程(17)有两个解 λ_1 和 λ_2 , 分别代入式(16)中可得到两个解向量, 选择一个正确的解向量 \mathbf{h} . 再用这个新的解向量更新加权系数 a_i , b_i 和 c_i , 并重复以上求解过程, 经迭代后(计算机仿真为 5 次), 使式(12)的平方误差和 J 最小的解向量即为 TOA 定位方程的最小二乘解.

3.2 到达时间和解向量的选取

由于目标信号发射时间未知, 需对信号到达时间 t_i 作一定的限制来保证 \mathbf{B} 和 \mathbf{D} 矩阵中各元素值的量级不会相差太大, 避免数值求解的不稳定. 取第 1 个地面接收站作为 TOA 时间参考(即 $t_1^* = 0$), 各地面接收站相对于第 1 个地面接收站的 TOA 时间为: $t_1^* = 0, t_2^* = t_2 - t_1, \dots, t_N^* = t_N - t_1$. 限定 TOA 时间的定位方程组如下:

$$\begin{aligned} -ct &= r_1 \\ c(t_2^* - t) &= r_2 + \varepsilon_2^* \\ &\vdots \\ c(t_N^* - t) &= r_N + \varepsilon_N^* \end{aligned} \quad (18)$$

其中 $\varepsilon_i^* = \varepsilon_i - \varepsilon_1, i = 2, 3, \dots, N$. 由于取 $t_1^* = 0$, 这时 ct_i^* 则代表了目标与第 i 个地面站的距离和第 1 个地面站之间的距离差. 对方程组(18)进行最小二乘求解, 可解释为以目标位置作为圆心, 寻找一个过地面站 1 的球面, 使得该球面与其它各地面站 i 之间的距离尽可能的接近 ct_i^* . 图 1 是无测量误差情况下限定 TOA 时间的定位方程(18)的几何示意.

本文对 TOA 定位方程组的求解以定位方程的误差平方和最小为准则, 使目标函数 J 较小的解向量即为

所选取的解. 根据因果关系目标信号的 TOE 必早于 TOA, 限定 TOA 后有效解向量的时间分量应小于 t_1^* (即为负值). 故解向量的选取流程如下:

(1) 首先根据二次方程的根 λ 由式(16)得到两个解向量, 如果二次方程的根 λ 为虚数, 则取根的实部进行计算.

(2) 如果两个解向量中只有一个解向量的时间分量为负, 则选取该解向量为正确的解向量; 如果两个解向量的时间分量均为负, 则选取使式(12)的平方误差和 J 较小者为正确的解向量.

(3) 如果两个解向量的时间分量均为正, 则令这两个解向量的时间分量为负值, 并选取使式(12)的平方误差和 J 较小者为正确的解向量.

4 计算仿真

仿真在二维平面对不同几何位置的目标将本文的 TOA-LS 算法和 Bancroft 算法的定位精度与 Cramer-Rao 下界(CRLB)进行了比较. 仿真实验的布站位置和目标几何位置见图 2, 地面站坐标为 $(x_1 = -4.71, y_1 = -12.96), (x_2 = -14, y_2 = 30), (x_3 = 16, y_3 = 44)$ 和 $(x_4 = 30, y_4 = 14)$, 目标坐标为 $A(8, 22), B(6, 13), C(20, -25)$ 和 $D(-30, 50)$. 测量误差满足均值为 0、方差为 $\sigma^2/2$ 的独立高斯分布, 方差单位是 m^2 . 限定 TOA 时间后, 测量误差的方差则是 σ^2 . 对定位精度的衡量采用 10000 次独立仿真实验, 最后统计目标位置估计的均方误差 $\text{MSE} = E[(x - \hat{x})^2 + (y - \hat{y})^2]$.

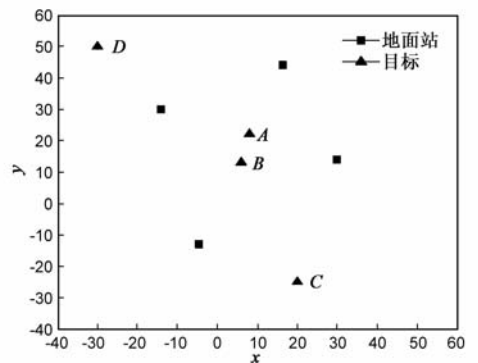


图2 目标与地面站的相对几何位置关系

表 1 给出了在不同测量误差方差下对以上四个目标的定位结果, 误差方差的取值采用 $\text{dB} = 10\log\sigma^2$ 表示. 可看出, TOA-LS 算法对 4 个目标的估计都很接近 CRLB 下界, 而 Bancroft 算法对目标 A 和 C 的估计能够接近

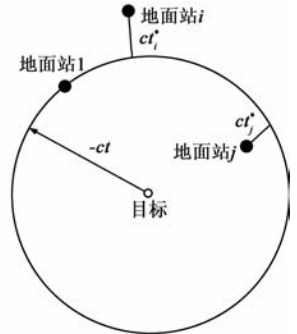


图1 限定TOA时间的定位方程几何解释

CRLB下界,但对目标 B 和 D 的估计误差则远大于 CRLB下界。 A 和 B 都是近距离目标,而 C 和 D 则是远距离目标,Bancroft 算法对于近距离和远距离不同位置目标在定位精度上不能保证都能达到最优估计。

表 1 定位误差比较

目标	$A(8\text{dB})$	$B(8\text{dB})$	$C(-5\text{dB})$	$D(-5\text{dB})$
Bancroft	3.22	63.7	4.75	84.68
TOA-LS	3.17	3.31	4.66	11.32
CRLB	3.16	3.30	4.50	11.14

图 3 分别给出了对目标 B 和 D 估计性能的均方误差曲线,图中测量误差方差仍采用 $\text{dB} = 10\log\sigma^2$ 表示。TOA-LS 算法对近距离目标 B (图 3(a))的估计性能在较大的测量误差门限内(20dB)均能保持接近 CRLB 下界,而对远距离目标 D (图 3(b))保持接近 CRLB 下界的估计性能的测量误差门限则较小(5dB)。而 Bancroft 算法的估计性能则对目标的几何位置较敏感,对近距离目标 B 和远距离目标 D 的估计误差并不会随着测量误差的降低而接近 CRLB 下界。

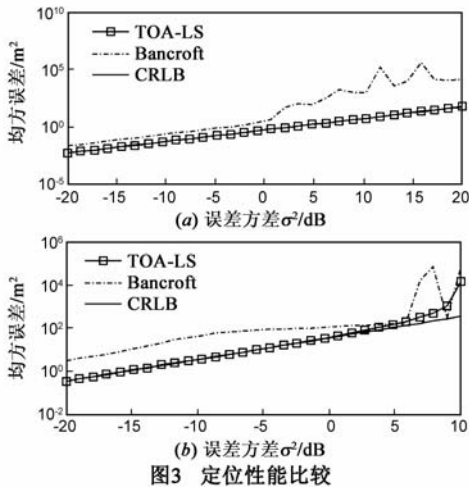


图 3 定位性能比较

5 结论

基于 Bancroft 的单点定位算法,本文通过引入目标信号发射时间 TOE 作为未知量,得出了非一致性 TOA 定位方程组的闭式最小二乘解,并给出了限定到达时间的定位方程组最小二乘解的几何解释。仿真结果表明,本文算法计算有效且数值稳定,对目标的几何位置不敏感,估计结果接近理论方差下界。

参考文献

- [1] ICAO Doc9830 AN/452. Advanced Surface Movement Guidance and Control Systems (A-SMGCS) Manual[S]. 2004.
- [2] ED-117. Minimum Operational Performance Specification for Mode S Multilateration System for Use in Advanced Surface Movement Guidance and Control Systems (A-SMGCS)[S]. 2003

- [3] W H Foy. Position-location solutions by Taylor-series estimation[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1976, 12(2): 187 - 194.
- [4] 杨天池, 金梁, 程娟. 一种基于 TOA 定位的 CHAN 改进算法[J]. 电子学报, 2009, 37(4): 819 - 822.
YANG Tian-chi, JIN Liang, CHENG Juan. An improvement CHAN algorithm based on TOA position[J]. Acta Electronica Sinica, 2009, 37(4): 819 - 822. (in Chinese)
- [5] Y T Chan, K C Ho. A simple and efficient estimator for hyperbolic location[J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1994, 42(8): 1905 - 1915.
- [6] J O Smith, J S Abel. Closed-form least-squares source location estimation from range-difference measurements [J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1987, 35(12): 1661 - 1669.
- [7] Y T Chan, et al. Exact and approximate maximum likelihood localization algorithms [J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2006, 55(1): 10 - 16.
- [8] S Bancroft. An algebraic solution of the GPS equations [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1985, 21(7): 56 - 59.
- [9] M Geyer, A Daskalakis. Solving passive multilateration equations using Bancroft's algorithm [A]. AIAA/IEEE/SAE 17th Digital Avionics Systems Conference Proceedings [C]. Bellevue, WA: IEEE Operations Center, 1998. Vol. 2, F41/1-F41/8.
- [10] 黄思训, 盛峥. 一种全球定位系统接收机单点定位的新算法及数值试验 [J]. 物理学报, 2006, 55(12): 6720 - 6726.
HUANG Si-xun, SHENG Zheng. The new algorithm for stand-alone positioning with global positioning system and numerical experiments [J]. Acta Physica Sinica, 2006, 55(12): 6720 - 6726. (in Chinese)

作者简介



林云松 男, 1969 年 3 月出生于四川省成都市, 电子科技大学自动化工程学院副教授, 博士, 主要研究方向新型导航定位和监视技术, 空中交通和防撞技术等。

E-mail: yslin384@163.com

孙卓振 男, 1987 年 7 月出生于山东省滕州市, 电子科技大学自动化工程学院硕士研究生, 主要研究方向无源多点定位和 ADS-B 监视技术。 E-mail: zhuozhensun@gmail.com

彭良福 男, 1966 年 8 月出生于四川省成都市, 西南民族大学电气信息工程学院副研究员, 博士, 主要研究方向空中交通和防撞技术、信号与信息处理和飞行仿真技术等。 E-mail: pengliangfu@126.com